특별하게 쫑내기

특쫑

고등 수학(상)

개념완성

고등 수학의 자신감을 채워 드립니다.

고등학교 수학은 기본 개념의 양은 적은 반면, 개념 이해가 어렵고, 원리 파악에 많은 시간과 노력이 필요합니다. 문제 해결 능력 또한 개념의 이해 없이는 근본적으로 향상시킬 수 없습니다.

특쫑 개념완성은 고등 수학의 개념을 처음 학습하는 학생에게 최적화된 교재입니다. 개념을 이해하고, 계산력 훈련을 통해 체득하는 과정에서 고등 수학에 대한 막연한 두려움은 사라질 것입니다. 그 자리에 수학에 대한 자신감을 채워 드리겠습니다.

이 책의 구성과 특징 Structure & Features

고등수학의 '기본기'를 다지기 위한 공부 방법을 제시합니다.

STEP 1 개념완성

❶ 개념학습 ❷ 개념체크 ❸ 개념드릴 ❹ 개념특강

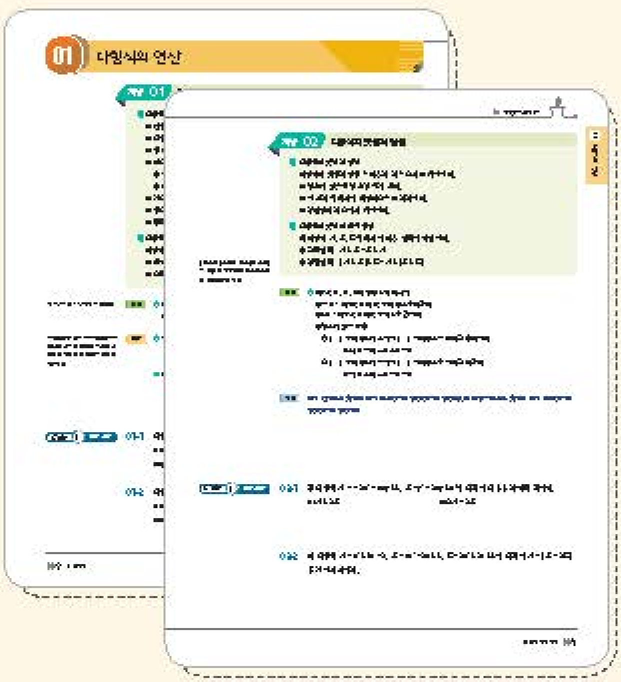
꼭 알아야 하는 교과서의 핵심개념을 학습하고, 개념체크를 통해 개념을 체득합니다. 또한 적절한 계산력 훈련으로 개념을 적용하여 완성하고, 중요한 개념은 개념특강으로 견고하게 다집니다.

+

STEP 2 계산력완성

❶ 개념복습 ❷ 개념드릴 ❸ 개념확인 개념확장 ❹ 실전문제 수능문제

핵심개념을 학습한 후 계산력 훈련으로 개념을 이해하고, 개념확인 및 개념확장 문제를 통해 문제 해결력의 자신감을 얻습니다. 계산력 훈련으로 다져진 수학적 개념을 실전에 적용하여 고등수학의 기본기를 완성합니다.

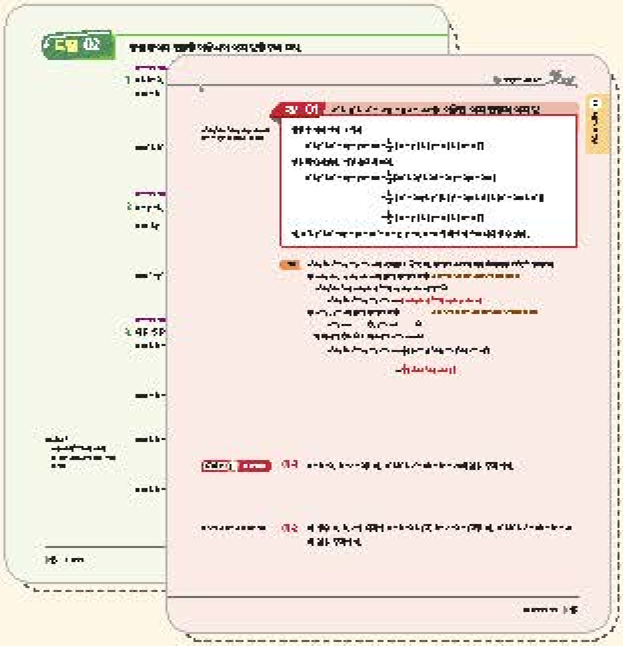


❶ **개념학습** : 반드시 숙지해야 할 교과서 필수 개념을 주제별로 세분화하여 쉽고, 체계적으로 상세하게 설명하였습니다. 보충, 증명, 접근, 참고에 따라 다음과 같이 상세하게 기술하였습니다.

- 보충 개념에 대한 상세한 설명을 기술하였습니다.
- 증명 개념에서 다룬 성질에 대한 증명, 유도 과정을 제시하였습니다.
- 접근 예제를 이용하여 개념의 이해를 돕고자 하였습니다.
- 참고 문제의 조건이나 표현에 대하여 배경지식이나 주의할 점 등을 제시하였습니다.

❷ **개념 Tip** : 개념과 관련된 내용을 정리하여 개념을 이해하는데 어려움이 없도록 하였습니다.

❸ **개념체크** : 개념과 관련된 문제를 예시를 통해 개념을 적용할 수 있도록 하였습니다. STEP 0 개념 체크



❹ **개념드릴** : 개념 이해를 위한 계산력 훈련 과정을 수록하여 개념을 적용하는 과정을 익히고, 문제 해결력의 기초를 다질 수 있습니다. 개념의 중요도에 따라 때로는 많게, 때로는 적절하게 배분하였으며, 계산력 훈련이 필요없는 개념의 경우에는 수록하지 않았습니다.

❺ **개념특강** : 학습목표에서 중요한 개념이나 학교시험 출제율이 높은 유형의 개념은 별도의 특강을 마련하여 집중적으로 개념을 다질 수 있도록 하였습니다. 또한 연구를 통해 특강으로 다루어야 할 근거를 상세하게 기술하였습니다.

연구 개념으로 정리하기에 일부 부족한 내용을 상세히 다루었습니다.

❻ **특강예제** : 특강으로 다룬 개념의 이해를 위한 예시문항과 변형유제를 수록하여 문제 해결력을 키울 수 있도록 하였습니다.

STEP 0 특강 예제

❼ **연습문제** : 중단원별로 구성된 연습문제는 개념확인, 개념확장의 두 가지 테마로 나누어 기술하였습니다.

개념확인 : 앞서 다룬 개념을 재확인하는 문제로, 개념체크 수준에서 다루었습니다. STEP 1 개념 확인

개념확장 : 개념확인 문제보다 한 걸음 더 나아간 문제로 구성하여 자연스럽게 문제 해결력을 향상시킬 수 있도록 하였습니다.

STEP 2 개념 확장

❽ **실전 문제** : 전국 고등학교 시험지를 분석하여 출제율이 높은 문제만을 엄선하여 수록하였습니다. 개념을 실전에 적용하여 해결해 봄으로써 수학에 대한 자신감은 한층 더 커질 것입니다.

STEP 3 실전 문제

❾ **수능 적용** : 서울, 경기, 부산, 인천, 평가원, 수능 기출문제에 개념을 적용해 봄으로써 내신 뿐 아니라 수능까지 대비할 수 있도록 하였습니다. 특히, 출제자의 출제의도를 제시하여 모의고사의 막연한 두려움을 해소하였습니다. STEP 4 수능 적용

이 책의 차례 Contents

● : 개념드릴 ● : 개념특강

I 다항식

II 방정식

6. 고차방정식

7. 연립방정식

III 부등식

1. 일차부등식

2. 이차부등식

IV 도형의 방정식

1. 평면좌표

2. 직선의 방정식

3. 원의 방정식

4. 원과 직선

5. 도형의 이동

특쫑 쉼터

연애를 풀다

'연애를 수학으로 풀 수 있을까?'

수학자 해나 프라이는 이런 궁금증을 품었다. 연애처럼 복잡하고 예측 불가한 것을 계산하긴 힘들 듯하지만, 수학은 그 못지않게 변화무쌍한 날씨나 우주의 원리도 밝힌다. 해답은 얻지 못하더라도 그 속에 담긴 법칙을 찾아낼 거라 생각했다.

연애와 수학을 접목한 시도는 여럿 있었다. 수학자 피터 배커스는 〈왜 나는 여자 친구가 없을까〉라는 논문까지 썼다. 그는 우주에 있는 외계인의 숫자를 예측하는 '드레이크 방정식'을 응용해 세상에 애인이 될 만한 사람이 몇 명 있는지 계산했다. 여러 조건을 세워 큰 범위부터 좁혀 가는 방식이다. '같은 도시에 사는 여성은 몇 명일까?' '그중 또래는?' '그중 미혼은?' 이렇게 일곱 기준을 정하니 70억 인구 중 단 26명만 남았다. 이에 해나 프라이는 반론을 제기했다. 그가 너무 까다롭다는 것이다. 상대의 연령대를 넓히거나 도시 밖으로 눈을 돌리면 후보는 몇 배 많아진다. 모든 조건에 맞는 이는 없다. 진짜 중요한 몇 가지만 남기고 마음을 열면 뜻밖에 좋은 결과를 얻을지 모른다. 그래서일까? 피터는 몇 년 뒤 짝을 만나 결혼했다.

온라인에 어떤 프로필 사진을 올려야 연애에 도움이 되는지도 수학으로 알 수 있다. 수학자들이 만든 데이트 사이트 '오케이 큐피드'는 프로필 사진 호감도와 구애 메시지를 받는 빈도를 통계로 만들었다. 한데 의외로 외모 점수가 낮은 사람이 메시지를 더 많이 받았다. 해나는 말했다. "누구나 단점은 가리고, 장점은 부각한 사진을 올린다. 그러나 짝을 찾으려면 모두에게 평범한 호감을 얻기보다 호불호가 나뉘는 게 좋다. 벗겨진 머리나 튀어나온 배도 당당히 보여라. 당신을 마음에 들어 하는 사람은 그래도 좋아할 것이다."

모임에서 호감이 가는 상대와 짝이 될 확률도 계산할 수 있다. '게일-섀플리 알고리즘'은 두 집단 사이에 짝을 짓는 연산이다. 연애뿐 아니라 병원의 의사 배정, 공립학교 학생 배정 등에도 적용된다. 결론은 이렇다. 가만히 기다리는 것보다 먼저 다가갈 때 결과가 더 만족스럽다는 것이다. 어떤 관계든 거절을 감수하고 적극적으로 나서는 편이 유리하다.

마음을 열고 용기 내 다가가기, 단점도 드러내기. 수학이 준 연애 법칙이다.

(출처 : 좋은생각)

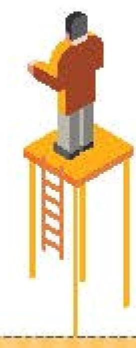
TED(www.ted.com) 강연에서 수학자 해나 프라이는 우리가 사랑을 찾는 방법에 대한 패턴을 보여주고, 특별한 애인을 찾는 방법에 대해 수학으로 증명된 세 가지 팁을 제공하고 있다.

I 다항식

1. 다항식의 연산

2. 항등식과 나머지정리

3. 인수분해



01 다항식의 연산

개념 01 다항식의 이해

1 다항식에서 사용하는 용어

(1) **단항식** 수 또는 문자의 곱으로만 이루어진 식

(2) **다항식** 단항식 또는 단항식의 합으로 이루어진 식

(3) **항** 다항식을 이루고 있는 각각의 단항식

(4) **차수**

① 항의 차수 : 항에서 특정한 문자가 곱해진 개수

② 다항식의 차수 : 다항식에서 차수가 가장 큰 항의 차수

차수
$2x^3(=2\times x\times x\times x)$
계수

(5) **계수** 항에서 특정한 문자를 제외한 나머지 부분

(6) **상수항** 특정한 문자를 포함하지 않는 항

(7) **동류항** 문자와 차수가 같은 항

2 다항식의 정리 방법

다항식은 동류항끼리 모아서 정리하면 간단히 나타낼 수 있고, 다음과 같은 방법이 주로 쓰인다.

(1) **내림차순** 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 나타낸다.

(2) **오름차순** 한 문자에 대하여 차수가 낮은 항부터 높은 항의 순서로 나타낸다.

단항식은 다항식의 한 종류이다.

보충 1 3, $2x$, $-4a$, $-2xy$, xy^3, …과 같은 식은 단항식이고, 5, $x+y$, $x-y+1$, x^2-y^2, $xy-y+1$, …과 같이 단항식 또는 단항식의 합으로 이루어진 식은 다항식이다.

'~에 대한' 또는 '~에서 '~' 에 해당하는 문자에 주목하여 차수를 결정하고, 나머지는 계수로 생각한다.

접근 1 단항식 $2x^2y^3$에 대하여 ① x^2의 계수 : $2y^3$, x에 대한 2차식

② y^3의 계수 : $2x^2$, y에 대한 3차식

③ x^2y^3의 계수 : 2, x, y에 대한 5차식

2 다항식 $2x-4x^2-11$에 대하여

① x에 대하여 내림차순으로 정리하면 $-4x^2+2x-11$

② x에 대하여 오름차순으로 정리하면 $-11+2x-4x^2$

STEP 0 개념 체크

01-1 다항식 $3x^2y^2-2x^3-y+7$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) x에 대한 삼차항 (2) x에 대한 이 다항식의 차수

(3) y에 대한 상수항 (4) y에 대한 이 다항식의 차수

01-2 다항식 $2x^2+3xy-y^2+x-10y+1$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) x에 대하여 내림차순으로 정리하여라.

(2) x에 대하여 오름차순으로 정리하여라.

개념 02 다항식의 덧셈과 뺄셈

1 다항식의 덧셈과 뺄셈

다항식의 덧셈과 뺄셈은 다음과 같은 순서로 계산한다.

(1) 괄호가 있으면 괄호를 먼저 푼다.

(2) 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(3) 동류항끼리 모아서 계산한다.

2 다항식의 덧셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여 다음 법칙이 성립한다.

① 교환법칙 : $A+B=B+A$

② 결합법칙 : $(A+B)+C=A+(B+C)$

$(A+B)+C$와 $A+(B+C)$는 괄호를 생략하여 $A+B+C$로 나타내기도 한다.

보충 1 다항식 A, B, C와 실수 k에 대하여

① $-A$: 다항식 A의 각 항의 부호를 바꾼다.

② kB : 다항식 B의 각 항에 k를 곱한다.

③ 괄호가 있는 경우

㉠ ( ) 앞의 부호가 $+$이면 ( ) 안의 부호는 그대로 유지한다.

$A+(B-C)=A+B-C$

㉡ ( ) 앞의 부호가 $-$이면 ( ) 안의 부호를 반대로 바꾼다.

$A-(B+C)=A-B-C$

참고 수의 연산에서 덧셈에 대한 교환법칙과 결합법칙이 성립하듯이 다항식에서도 덧셈에 대한 교환법칙과 결합법칙이 성립한다.

STEP 0 개념 체크

02-1 두 다항식 $A=-3x^2-5xy+4$, $B=y^2-3xy+x^2$에 대하여 다음을 간단히 하여라.

(1) $A+2B$　　　　(2) $2A-3B$

02-2 세 다항식 $A=x^2+4x-3$, $B=5x^2-2x+1$, $C=2x^2+3x+4$에 대하여 $A-(B-2C)$를 간단히 하여라.

개념 03 다항식의 곱셈

1 다항식의 곱셈

두 다항식의 곱셈은 분배법칙과 지수법칙을 이용하여 식을 전개한 후, 동류항끼리 모아서 계산한다.

$$k(a+b+c)=\underset{①}{ka}+\underset{②}{kb}+\underset{③}{kc} \qquad (x+y)(x+y)=\underset{①}{x^2}+\underset{②}{xy}+\underset{③}{yx}+\underset{④}{y^2}=x^2+2xy+y^2$$

2 다항식의 곱셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여 다음 법칙이 성립한다.

① 교환법칙 : $AB=BA$

② 결합법칙 : $(AB)C=A(BC)$

③ 분배법칙 : $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

$(AB)C$와 $A(BC)$는 괄호를 생략하여 ABC로 나타내기도 한다.

보충 1 문자는 다음 지수법칙을 이용하여 계산한다. (단, 분모는 0이 아니다.)

a, b가 실수이고 m, n은 자연수일 때, 다음 법칙이 성립한다.

① $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ② $(a^m)^n=a^{mn}$

③ $(ab)^n=a^nb^n$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$ ④ $a^m\div a^n=\begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n)\end{cases}$

몇 개의 다항식의 곱을 하나의 다항식으로 나타내는 것을 전개라 하고, 전개하여 얻은 식을 전개식이라 한다.
즉, 좌변을 우변과 같이 나타내는 것을 전개한다고 한다.

(단항식)×(단항식)의 경우 ⬅ 수끼리, 문자끼리 곱한다.

$$2xy\times3x^2y^3=(2\times3)\times(xy\times x^2y^3)=6x^3y^4$$

(단항식)×(다항식)의 경우 ⬅ 분배법칙을 이용한다.

$$3x(2x^2-4x+3)=3x\times2x^2+3x\times(-4x)+3x\times3=6x^3-12x^2+9x$$

(다항식)×(다항식)의 경우 ⬅ 하나의 다항식을 문자처럼 생각하고 분배법칙을 이용한다.

$$\begin{aligned}(a+b)(x-y+3)&=(a+b)\times x+(a+b)\times(-y)+(a+b)\times3\\&=ax+bx-ay-by+3a+3b\end{aligned}$$

참고 수의 연산에서 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립하듯이 다항식에서도 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립한다.

STEP 0 개념 체크

03-1 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $x^3y\times(-2xy^2)$ (2) $\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^3\times\left(\dfrac{y^4}{x}\right)^2$

03-2 다음 식을 전개하여라.

(1) $2x(3x^3+4x+2)$ (2) $(x+1)(x^2+2x+3)$

개념 04 곱셈 공식

1 곱셈 공식 Ⅰ

자연수의 곱셈에서 구구단이 기본이듯이 다항식의 곱셈에서는 곱셈 공식이 기본이다.

다음은 중학교 과정에서 공부한 곱셈 공식이다.

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

③ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

④ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

직접 전개해 보면 공식을 보다 쉽게 파악할 수 있다.

2 곱셈 공식 Ⅱ

다음은 고등학교 과정에서 다루는 곱셈 공식이다.

① $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

② $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

③ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

④ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

⑥ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

곱셈 공식을 사용하여 전개한 결과가 눈에 익숙해지도록 암기는 필수적이다.

증명 2 곱셈 공식 Ⅱ를 유도해 보자.

① $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$ ⬅곱셈 공식 Ⅰ의 ① 적용

$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3$

$=\boldsymbol{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

$(a-b)^3=\{a+(-b)\}^3=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$ ⬅b 대신 $-b$를 대입

$=\boldsymbol{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

② $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=\boldsymbol{a^3+b^3}$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=\boldsymbol{a^3-b^3}$

③ $(x+a)(x+b)(x+c)=\{x^2+(a+b)x+ab\}(x+c)$ ⬅곱셈 공식 Ⅰ의 ③ 적용

$=x^3+\underline{cx^2+(a+b)x^2}+\underline{(a+b)cx+abx}+\underline{abc}$

$=\boldsymbol{x^3+\underbrace{(a+b+c)}_{\text{세 상수의 합}}x^2+\underbrace{(ab+bc+ca)}_{\text{두 상수끼리의 곱의 합}}x+\underbrace{abc}_{\text{세 상수의 곱}}}$

④ $(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$ ⬅곱셈 공식 Ⅰ의 ① 적용

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=\boldsymbol{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-ca^2+a^2b+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-abc+ca^2+b^2c+c^3-abc-bc^2-c^2a$

$=\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc}$

⑥ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$ ⬅곱셈 공식 Ⅰ의 ② 적용

$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$

$=\boldsymbol{a^4+a^2b^2+b^4}$

드릴 01 곱셈 공식을 암기하고, 적용해 보자.

곱셈 공식이 생각나지 않으면 일일이 전개하여 식을 정리하고, 암기가 될 때까지 반복한다.

곱셈 공식 I

1 다음 식을 전개하여라.

(1) $(2x+3y)^2$

(2) $(3x-4y)^2$

(3) $(5x+2)(2-5x)$

(4) $(7x-3y)(4x+2y)$

곱셈 공식 II

2 다음 식을 전개하여라.

(1) $(2x+3y)^3$

(2) $(2x-3y)^3$

(3) $(x+1)(x-2)(x+3)$

(4) $(x-2)(x-3)(x-4)$

(5) $(a-2b-c)^2$

(6) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

(7) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

(8) $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$

(9) $(2a+b-c)(4a^2+b^2+c^2-2ab+bc+2ca)$

(10) $(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)$

공통인 부분을 t로 치환하여 전개한다.

공통부분이 있는 다항식의 전개(치환 Ⅰ)

3 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x-y+z)(x+y-z)$

(2) $(a+b+c)(a-b-c)$

(3) $(x^2+2x+2)(x^2-x+2)$

(4) $(x^2+2x-2)(x^2+2x+4)$

(5) $(x^2+x+2)(x^2+x-4)$

(6) $(x^2+5x-2)(x^2+5x-3)$

상수항의 합이 같은 것끼리 먼저 곱한 후 공통인 부분을 t로 치환하여 전개한다.

공통부분이 있는 다항식의 전개(치환 Ⅱ)

4 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x-4)(x-2)(x+1)(x+3)$

(2) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$

(3) $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)$

(4) $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$

(5) $(x-2)(x-1)(x+3)(x+4)$

(6) $(x-2)(x+2)(x+5)(x+9)$

개념 05 곱셈 공식의 변형

1 곱셈 공식의 변형 Ⅰ

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$, $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

② $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$, $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

③ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

④ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

⑤ $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ 특강 01

⑥ $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}+3abc$

(단, $a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$이면 $a^3+b^3+c^3=3abc$이다.)

2 곱셈 공식의 변형 Ⅱ

① $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

② $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$

③ $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$, $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

대칭식의 값은 합과 곱의 값을 이용하여 구한다.

보충 $x+y$, xy, $xy+x+y$, x^2+y^2, x^3+y^3과 같이 x, y가 바뀌어도 변하지 않는 식을 대칭식이라 한다. 이때 x, y의 대칭식은 $x+y$와 xy에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ ➡ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$ ➡ $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$(x+y)^3=x^3+3xy(x+y)+y^3$ ➡ $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

STEP 0 개념 체크

05-1 $a+b=10$, $ab=6$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) a^2+b^2 (2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

(2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$의 값을 먼저 구한다.

05-2 $x+\frac{1}{x}=3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$ (2) $x-\frac{1}{x}$

특강 01 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$를 이용한 식의 변형과 식의 값

$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx$도 같은 방법으로 유도할 수 있다.

곱셈 공식의 변형 Ⅰ에서

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$$

임을 학습하였다. 이를 유도해 보자.

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx&=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)\\&=\frac{1}{2}\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\}\\&=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\end{aligned}$$

즉, $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$는 $x-y$, $y-z$, $z-x$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

연구 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$의 식의 값을 구할 때, 주어진 조건에 따라 문제해결 전략은 달라진다.

① $x+y+z$, $xy+yz+zx$의 값이 주어진 경우 ➡ 곱셈 공식을 이용하여 식의 값을 구한다.

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$이므로

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)$$

② $x-y$, $y-z$의 값이 주어진 경우 ➡ 두 식의 합 또는 차를 이용하여 식의 값을 구한다.

$$x-y=a \cdots\cdots ㉠,\ y-z=b \cdots\cdots ㉡$$

에 대하여 ㉠+㉡을 계산하면 $x-z=a+b$

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx&=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\\&=\frac{1}{2}\{a^2+b^2+(a+b)^2\}\end{aligned}$$

STEP 0 특강 예제

01-1 $a-b=2$, $b-c=3$일 때, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$의 값을 구하여라.

두 식의 합 또는 차를 이용한다.

01-2 세 실수 a, b, c에 대하여 $a-b=2+\sqrt{3}$, $b-c=2-\sqrt{3}$일 때, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$의 값을 구하여라.

드릴 02 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값을 구해 보자.

곱셈 공식의 변형 (

1 $a+b=2$, $ab=-1$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $a-b$

(2) a^2-b^2

(3) a^2+b^2

(4) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$

곱셈 공식의 변형 (

2 $x-y=1$, $xy=2$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $x+y$

(2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

(3) x^2-y^2

(4) x^2+y^2

곱셈 공식의 변형 (

3 다음 물음에 답하여라.

(1) $a+b=3$, $ab=-2$일 때, a^3+b^3의 값을 구하여라.

(2) $a-b=1$, $ab=4$일 때, a^3-b^3의 값을 구하여라.

(3) $a+b=2$, $a^3+b^3=14$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

(3) a^3+b^3
$=(a+b)^3-3ab(a+b)$
를 이용하여 ab의 값을 먼저 구한다.

(4) $a+b=4$, $a^2+b^2=12$일 때, $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$의 값을 구하여라.

곱셈 공식의 변형 I

4 $a+b+c=2$, $ab+bc+ac=4$, $abc=1$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $(a+1)(b+1)(c+1)$

(2) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

(4) $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$
$=(ab+bc+ca)^2$
$-2abc(a+b+c)$

(3) $a^3+b^3+c^3$

(4) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

곱셈 공식의 변형 II

5 $x+\dfrac{1}{x}=4$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$

(2) $x-\dfrac{1}{x}$

(3) $x^2-\dfrac{1}{x^2}$

(4) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

(5) $x^3-\dfrac{1}{x^3}$
$=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}+1\right)$

(5) $x^3-\dfrac{1}{x^3}$

(6) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$

개념 06 다항식의 나눗셈

(다항식)÷(단항식)의 계산

$(a+b)\div m=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}$ (단, $m\neq0$)

1 (다항식)÷(다항식)의 계산

다항식을 다항식으로 나눌 때에는 두 다항식을 내림차순으로 정리한 후, 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산하여 몫과 나머지를 구한다.

나눗셈과 검산식

$13\div5=2\cdots3$

⇨ [검산식] $13=5\times2+3$

2 다항식의 나눗셈에 대한 등식

다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$$A=BQ+R \text{ (단, (}R\text{의 차수)<(}B\text{의 차수))}$$

특히 $R=0$이면 A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

$$\begin{array}{r|l} & Q \quad \cdots \text{(몫)} \\ \hline B & A \\ & BQ \\ \hline & R \quad \cdots \text{(나머지)} \end{array}$$

다항식의 나눗셈은 자연수의 나눗셈과 달리 나머지가 음수인 경우도 있다.

접근 (다항식)÷(다항식)은 두 다항식을 내림차순으로 정리한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

$(2x^2+5x+4)\div(x+2)$에 대하여

① 다항식을 직접 나누는 경우

$$\begin{array}{r|l} & 2x+1 \quad \leftarrow \text{몫 : } 2x+1 \\ \hline x+2 & 2x^2+5x+4 \\ & 2x^2+4x \quad \leftarrow (x+2)\times 2x \\ \hline & \quad\quad\; x+4 \\ & \quad\quad\; x+2 \quad \leftarrow (x+2)\times 1 \\ \hline & \quad\quad\quad\; 2 \quad \leftarrow \text{나머지 : } 2 \end{array}$$

② 계수만 써서 나누는 경우

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 1 & \quad \leftarrow \text{몫 : } 2x+1 \\ \hline 1\ \ 2 & 2 & 5 & 4 \\ & 2 & 4 & \\ \hline & & 1 & 4 \\ & & 1 & 2 \\ \hline & & & 2 \quad \leftarrow \text{나머지 : } 2 \end{array}$$

참고 다항식의 나눗셈을 할 때

내림차순으로 정리 ➡ 계수가 0인 항이 있으면 빈 칸으로 놓는다. ➡ 차수에 맞추어 계산한다.

STEP 0 개념 체크

06-1 다음 나눗셈에서 몫과 나머지를 구하여라.

(1) $(x^3-2x^2-10x+15)\div(x+3)$

(2) $(4x^3+3x-1)\div(x^2+2x-3)$

검산식을 이용한다.

06-2 다항식 A를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 x^2+x+1, 나머지가 3일 때, 다항식 A를 구하여라.

연습 문제 01. 다항식의 연산

STEP 1 개념 확인

개념01 다항식의 이해

01 다항식 $6xy^2+3x+2y^3-2x^2y-y+1$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) x에 대하여 내림차순으로 정리하여라.

(2) x에 대하여 오름차순으로 정리하여라.

개념02 다항식의 덧셈과 뺄셈

식을 간단히 한 후, 두 다항식을 대입하여 계산한다.

02 두 다항식 $A=x^2+5x-5$, $B=2x^2-x+1$에 대하여 다음을 간단히 하여라.

(1) $3A-2(A-B)$

(2) $(A-3B)-(3A-2B)$

개념04 곱셈 공식

03 다음 식을 전개하여라.

(1) $(2a+b-c)^2$

(2) $(3x-2y-z)^2$

(3) $(3a+1)^3$

(4) $(2x-3y)^3$

(5) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$

(6) $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$

(7) $(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$

(8) $(9a^2+6ab+4b^2)(9a^2-6ab+4b^2)$

개념05 곱셈 공식의 변형

04 $x-y=-4$, $xy=3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) x^2+y^2

(2) x^3-y^3

개념05 곱셈 공식의 변형

05

다음 물음에 답하여라.

(1) $x+y=4$, $x^2+y^2=8$일 때, x^3+y^3의 값을 구하여라.

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$를 이용하여 xy의 값을 먼저 구한다.

(2) $x+y+z=5$, $xy+yz+zx=7$일 때, $x^2+y^2+z^2$의 값을 구하여라.

개념05 곱셈 공식의 변형

06

$x-\frac{1}{x}=3$일 때, $x^3-\frac{1}{x^3}$의 값을 구하여라.

개념06 다항식의 나눗셈

07

다음 나눗셈에서 몫과 나머지를 구하여라.

(1) $(4x^3-2x^2-6x+1)\div(2x+1)$

(2) $(2x^3+3x^2+5)\div(x^2+2x-1)$

STEP 2 개념 확장

개념02 다항식의 덧셈과 뺄셈

08

두 다항식 $A=x^2-xy+2y^2$, $B=4x^2-6xy+2y^2$에 대하여 $2(X+A)=B$를 만족시키는 다항식 X를 구하여라.

$2(X+A)=B$를 X에 대하여 먼저 정리한 후 다항식 A, B를 대입하여 구한다.

개념04 곱셈 공식

$\frac{1}{2}(3-1)=1$임을 이용한다.

09 $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$을 간단히 하여라.

개념05 곱셈 공식의 변형

곱셈 공식의 변형을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 먼저 구한다.
(2) $(ab+bc+ca)^2$의 전개식을 이용한다.

10 $a+b+c=4$, $a^2+b^2+c^2=8$, $abc=-2$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

(2) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

개념05 곱셈 공식의 변형

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$를 이용하여 $x+\frac{1}{x}$의 값을 먼저 구한다.

11 $x^2+\frac{1}{x^2}=3$일 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값을 구하여라. (단, $x>0$)

개념06 다항식의 나눗셈

12 다항식 $8x^3-3$을 다항식 B로 나누었더니 몫이 $4x^2+2x+1$이고, 나머지가 -2였다. 이때 다항식 B를 구하여라.

STEP 3 실전 문제

다항식에서 사용되는 용어와 정리 방법을 이해하기

상 중 하

01 다항식 $5x^2y-4x^2-y+7$에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① x에 대한 2차식이다.

② x에 대하여 내림차순으로 정리하면 상수항은 7이다.

③ y에 대한 1차식이다.

④ y에 대하여 내림차순으로 정리하면 최고차항의 계수는 $5x^2-1$이다.

⑤ y에 대하여 내림차순으로 정리하면 상수항은 $-4x^2+7$이다.

다항식의 전개식에서 계수 구하기

상 중 하

분배법칙을 이용하여 일차항이 나오는 부분만 전개한다.

02 다항식 $(3x^2-2x-k)(x^2-x+2)$의 전개식에서 일차항의 계수가 6일 때, 상수 k의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10

④ 12 ⑤ 14

곱셈 공식을 이용하여 다항식 전개하기

상 중 하

03 다음 식의 전개 중 옳은 것은?

① $(2x-3y+z)^2=4x^2+9y^2+z^2-xy+yz-zx$

② $(3x-1)(9x^2+3x+1)=27x^3+1$

③ $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4-8x^2+y^4$

④ $(x-1)(x+3)(x-5)=x^3-3x^2-13x+15$

⑤ $(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx)=x^3-y^3+z^3+3xyz$

곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값 구하기

상 중 하

$2a+b=3ab$, $2b+c=3bc$, $2c+a=3ca$를 변끼리 더하여 $ab+bc+ca$의 값을 구한다.

04 세 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=3$이고, $2a+b=3ab$, $2b+c=3bc$, $2c+a=3ca$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9

④ 12 ⑤ 15

항등식의 성질 이해하기

상 중 하

05 $x+y=1$을 만족시키는 모든 실수 x, y에 대하여 등식

$$2ax+ay-3=(1-b)x+by$$

가 항상 성립한다. 이때 상수 a, b에 대하여 $2a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

미정계수법(수치대입법)을 이용하여 미정계수 구하기

상 중 하

주어진 등식에 $x=-2$, $x^2=2$를 각각 대입하여 상수 a, b에 대한 식을 세운다.

06 다항식 $f(x)$에 대하여 $(x+2)(x^2-2)f(x)=x^4-ax^2+b$가 x에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=0$, $b=16$ ② $a=1$, $b=20$ ③ $a=3$, $b=4$
④ $a=4$, $b=0$ ⑤ $a=6$, $b=8$

나머지정리를 이용하여 미정계수 구하기

상 중 하

07 다항식 x^3+ax^2-3x+2를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지와 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 같을 때, 상수 a의 값은?

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

인수정리를 이용하여 미정계수 구하기

상 중 하

나눗셈에 대한 항등식을 세운 후 $x^2=3$, $x=1$을 각각 대입하여 상수 a, b에 대한 식을 세운다.

08 다항식 x^4+ax^2+b가 x^2-3을 인수로 가지고 $x-1$로 나누어떨어진다고 할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+2b$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

I 실전 문제

조립제법을 이용하여 몫과 나머지 구하기

09 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 오른쪽과 같이 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

k	1	a	-1	b
		c	d	18
	1	5	9	20

① $a=3$　② $b=-2$　③ $c=2$
④ $d=10$　⑤ $k=2$

인수분해의 기본 공식을 이용하여 인수분해하기

10 다음 중 인수분해한 것이 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $8x^3+12x^2+6x+1=(2x+1)^3$
② $10x^2+31x+15=(5x+3)(2x+5)$
③ $x^3+8y^3=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$
④ $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx=(x-y+z)^2$
⑤ $mx^2-4my^2=m(x+2y)(x-2y)$

치환을 이용하여 인수분해하기

11 다음 중 $6(x+y)^2+(x+y)z-2z^2$의 인수인 것은?

① $x+y-z$　② $x+y+z$　③ $2x+2y-z$
④ $2x+2y+2z$　⑤ $3x+3y+z$

인수정리와 조립제법을 이용하여 고차식을 인수분해하기

$f(-1)=0$, $f(1)=0$임을 이용한다.

12 다항식 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+2x-3$이 $x+1$, $x-1$을 인수로 가질 때, $f(x)$를 인수분해하면?

① $(x+1)(x-1)(x^2-x+3)$　② $(x+1)^2(x+1)(x+3)$
③ $(x+1)(x-1)(x^2-x-3)$　④ $(x+1)(x-1)(x^2+3x+3)$
⑤ $(x+1)(x-1)(x^2-2x+3)$

STEP 4 수능 적용

[2015. 06. 고1] 곱셈 공식을 이용하여 식의 값 구하기

13 세 실수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+4c^2=44$, $ab+2bc+2ca=28$일 때, $(a+b+2c)^2$의 값은? [3점]

① 64 ② 81 ③ 100

④ 121 ⑤ 144

[2015. 06. 고1] 다항식의 나눗셈 계산하기

14 다음은 다항식 $3x^3-2x^2+3x+7$을 x^2-x+2로 나누는 과정이다.

$$
\begin{array}{r}
ax\ +1 \\
x^2-x+2\,\overline{)\,3x^3-2x^2+3x+7} \\
\underline{3x^3-3x^2+6x} \\
x^2-3x+7 \\
\underline{x^2-\ x+2} \\
-2x+b
\end{array}
$$

$a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

[2015. 06. 고1] 항등식의 성질 이해하기

15 모든 실수 x에 대하여 등식 $6x-5=a(x-1)+bx$가 성립할 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[2015. 11. 고1] 나머지정리 이해하기

16 다항식 $f(x)$를 x^2-7x로 나눈 나머지가 $x+4$일 때, 다항식 $f(x)$를 $x-7$로 나눈 나머지는? [3점]

① 4 ② 7 ③ 11

④ 16 ⑤ 21

특쫑 쉼터

하나의 나쁜 의견

영화 <철의 여인>, <매디슨 카운티의 다리>, <악마는 프라다를 입는다> 등을 통해 뛰어난 연기력을 인정받은 여배우 메릴 스트립. 지금은 아카데미 시상식에 단골 후보로 오르는 대배우지만 그녀에게도 무명 시절이 있었다.

메릴 스트립은 자신의 페이스북에 스물일곱 살 때, 오디션에 낙방하고 돌아오는 전철 안에서 찍은 사진을 올렸다. 그러곤 다음과 같은 글을 썼다.

"영화 <킹콩> 오디션을 보고 집에 오면서 찍은 사진이에요. 그날 나는 배역을 맡기에 너무 못생겼다는 말을 들었죠. 내 인생의 중요한 순간이었어요. 이 하나의 나쁜 의견은 배우가 되겠다는 꿈을 무너뜨릴 수도 있고, 아니면 신발 끈을 고쳐 매고 일어나 나 자신을 믿게 할 수도 있었죠. 나는 깊이 숨을 들이마시곤 혼자 말했어요. '당신 영화에 출연하기엔 내가 너무 못생겼다니 유감입니다. 하지만 당신 말은 그냥 수천 개 의견의 파도 중 하나일 뿐이에요. 나는 좀 더 친절한 파도를 찾아야겠어요.' 그리고 나는 오늘날 아카데미상 트로피 열여덟 개를 갖고 있습니다."

(출처 : 좋은생각)

메릴 스트립의 명언

인류의 가장 위대한 재능은 우리가 공감하는 능력이 있다는 것이다.

The great gift of human beings is that we have the power of empathy.